REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS-SETIF

MEMOIRE

Présenté à la faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Pour l'obtention du diplôme de

MAGISTER

Option : Algèbre et Géométrie

Par

Mr : KARA RACHID

THEME

Connexions associées aux variétés sous-riemanniennes

Soutenu le : 09/06/2011

Devant le jury :

Président :	*Mr. Drabla Salah*	*Prof Université Ferhat Abbas-Sétif*
Rapporteur :	*Mr. Bensalem Naceurdine*	*Prof Université Ferhat Abbas-Sétif*
Examinateurs :	*Mr. Krachni Mustafa*	*M.C.A Université Ferhat Abbas-Sétif*
	Mr. Merikhi Bachir	*M.C.A Université Ferhat Abbas-Sétif*

Remerciements :

Comme le veut la tradition, je vais tenter de satisfaire au difficile exercice de la page des remerciements, peut-être la tâche la plus ardue de ces années de thèse. Non qu'exprimer ma gratitude envers les personnes en qui j'ai trouvé un soutien soit contre ma nature, bien au contraire. Ce serait une ingratitude inqualifiable si j'omettais de remercier ceux qui m'ont assisté et qui m'ont soutenu, ne serait qu'un tant soit peu, dans la réalisation de ce travail.

La difficulté tient plutôt dans le fait de n'oublier personne. C'est pourquoi, je remercie par avance ceux dont le nom n'apparaît pas dans cette page et qui m'ont aidé d'une manière où d'une autre.

La première personne que je tiens à remercier est Mr. BENSALEM NACEURDINE, mon encadreur qui a su me laisser accomplir ce travail, tout en y gardant un œil critique et avisé , puis je remercie les membres de jury présidé par Mr. DRALA et assistés de Mr. KRACHNI et Mr. MERIKHI qui ont consenti et accepté de participer à mon jury de thèse .

Je remercie encore les membres du Département de Maths pour leur accueil, leur soutien et leur confiance.

Table des matières

Introduction **3**

1 Notions de géométrie riemannienne et sous-riemannienne **5**

1.1 Rappels de géométrie différentielle et de géométrie riemannienne 5

1.1.1 Champs de vecteurs

1.1.2 Groupes et algèbres de Lie 7

1.1.3 Connexion riemannienne 9

1.2 Variétés sous-riemanniennes 12

1.2.1 Distribution horizontale 12

1.2.2 Courbe horizontale 14

1.2.3 Métrique sous-riemannienne 14

1.2.4 Distance de Carnot-Carathéodory 14

2 Quelques connexions associées aux variétés sous-riemanniennes **16**

2.1 Introduction 16

2.2 Connexion horizontale 16

2.3 Torsion de la connexion horizontale 20

2.4 Divergence horizontale 22

2.5 Courbures 23

2.5.1 Courbure de Cartan 23

2.5.2 Courbure sectionnelle 24

2.5.3 Tenseur de courbure (1,1) 25
2.6 Applications sur le groupe de Heisenberg 28
2.6.1 Connexions sur le groupe de Heisenberg 28
2.6.2 Courbure de la connexion 30
2.6.3 Courbures et géodésiques sous-riemanniennes 32

3 Formalismes variationnels et connexions sous-riemanniennes 36
3.1 Introduction 36
3.2 Problème sous-riemannien 37
3.3 Formulation lagrangienne et connexion 40
3.4 Formulation de Hamilton-Jacobi et connexion 44

bibliographie 50

Introduction

Une distribution de p-plans de classe $\mathcal{C}^k$ sur une variété M est la donnée, pour tout point x de M, d'un sous-espace vectoriel $\mathcal{H}_x$ de T_xM, qui dépend de manière $\mathcal{C}^\infty$ de x. Une **structure sous-riemannienne** sur une variété M est un couple $(\mathcal{H}\ ,g)$ où $\mathcal{H}$ est une distribution sur M et g une métrique riemannienne sur $\mathcal{H}$. **Une variété sous-riemannienne** $(M,\ \mathcal{H},\ g)$ est une variété M de classe $\mathcal{C}^\infty$, muni d'une structure sous-riemannienne $(\mathcal{H}, g)$. Les variétés sous-riemanniennes ont été étudiées où utilisées dans des domaines variés des mathématiques, en particulier en géométrie riemannienne, dans la théorie des opérateurs différentiels du second ordre, dans l'étude des équations différentielles stochastiques et de la diffusion, en mécanique des contraintes non-holonomes. Mais leur étude est aussi intéressante en elle-même.

Dans le premier chapitre de ce mémoire nous rappelons dans le premier paragraphe quelques définitions et quelques résultats de la géométrie différentielles et de la géométrie riemannienne, tels que les champs de vecteurs, le crochet de Lie et groupe et algèbre de Lie, ainsi que la notion de connexion dans le cadre riemannien. Dans le deuxième paragraphe nous présentons les notions de base de la géométrie sous-riemannienne : distribution, courbe horizontale, métrique sous-riemannienne et aussi le problème des géodésiques.

Dans le deuxième chapitre et en l'absence de connexion canonique en sous-riemannien, nous introduisons quelques connexions compatibles avec les structures sous-riemanniennes, à savoir la connexion horizontale, la connexion 1- forme et la connexion 2-formes . Pour ces connexions, nous introduisons les notions de courbure, divergence, torsion. Une application de ces notions est donnée dans le cas du groupe de Heisenberg. Plusieurs propriétés géométriques ont été obtenus en utilisant ce formalisme, en particulier celles des géodésiques.

Dans le troisième chapitre, nous donnons une version géométrique de quelques formalismes du calcul variationnel. Plus précisément nous considèrons la notion de la **connexion 1-forme**, qui est une 1-forme vue comme une connexion et aussi la notion de la **connexion 2-formes** qui est aussi la 2-formes vue également comme une connexion et nous utilisons ces deux connexions pour réécrire les équations des géodésiques pour un problème sous-riemannien. Classiquement, le calcul des variations concerne l'étude des courbes optimales qui minimisent l'énergie totale "somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique". Il est bien connu que l'équation d'Euler-Lagrange permet de donner une condition nécessaire d'optimalité. Les solutions de l'équation d'Euler-Lagrange sont appelées les courbes extrémales du probléme. En fait, dans cette situation, les courbes extrémales "sont localement minimisantes" et d'un point de vue géométrique, ce sont les géodésiques d'une certaine connexion. Nous traitons une présentation du calcul variationnel pour le cas où ω est une connexion 1-forme des du type $(2-1)$ tels que $(2-3)$ non nulle, l'idée est de considérer les solutions du système des equations d'Euler-Lagrange comme des géodésiques pour une certaine connexion sous une certaine perturbation donnée par le tenseur de courbure. Nous prouvons ensuite que l'équation classique de Hamilton-Jacobi est toujours valide si le gradient est modifié par un gradient horizontal.

Chapitre 1

Notions de géométrie riemannienne et sous-riemannienne

Dans ce chapitre, nous allons introduire les notions de base de la géométrie différentielle, de la géométrie riemannienne et de la géométrie sous-riemannienne.

1.1 Rappels de géométrie différentielle et de géométrie riemannienne

1.1.1 Champs de vecteurs

On désigne par T_xM l'espace tangent à une variété M en un point x. Les espaces tangents T_xM où x parcourt la variété M forment une variété différentiable de dimension $2n$ (ou n =dim M), noté TM qui se projette canoniquement sur M. La projection

$$\pi : TM \rightarrow M$$

associe à tout vecteur X son point d'application, c'est -à-dire un point $x \in M$ tel que $X \in T_xM$, de sorte que $T_xM = \pi^{-1}(x)$. Les sections de cette projection, c'est -à-dire les applications différentiables

$$\begin{aligned} X \quad : \quad & M \to TM \\ & x \to X_x \qquad x \in M \end{aligned}$$

telles que $\pi \circ X = id$ i.e $X_x \in T_xM$, s'appellent champs de vecteurs sur M. Ces champs de vecteurs engendrent canoniquement un espace vectoriel (de dimension infinie) qui sera désigné par $\chi(M)$.

Soit $c : I \to M$ une courbe sur une variété M.

Définition 1.1.1 *Un champ de vecteurs le long de c est une application différentiable $V : I \to TM$ telle que $V(t) \in T_{c(t)}M$ pour tout $t \in I$.*

L'exemple le plus simple de champ de vecteurs le long de c est le champ de vecteur vitesse $\dot{c} : I \to M$.

On appelle dérivation sur l'algèbre $\mathcal{F}^\infty(M)$ toute application linéaire $D : \mathcal{F}^\infty(M) \to \mathcal{F}^\infty(M)$ qui vérifie la relation de Leibniz : $D(fg) = D(f)g + fD(g)$. Alors tout champ de vecteur X sur M définit une dérivation sur $\mathcal{F}^\infty(M)$ par la relation suivante : $(X \cdot f)(p) = X(p) \cdot f$, où dans le second membre $X(p)$ est pris comme dérivation au sens de la définition de $\mathcal{F}^\infty(M)$. Localement, cette formule s'écrit :

$$(X \cdot f)(p) = X_i(p)\frac{\partial f}{\partial x^i}(p),$$

c'est la « dérivée de f dans la direction de X », comme il est facile de le voir dans $\mathbb{R}^n$.

Réciproquement, toute dérivation de l'algèbre $\mathcal{F}^\infty(M)$ définit un champ de vecteurs. Donc on identifie $\chi(M)$ aux dérivations de $\mathcal{F}^\infty(M)$.

1.1.2 Groupes et algèbres de Lie

Définition 1.1.2 *Un groupe G est un groupe de Lie(ou groupe différentiable) si les applications :*

$$\begin{array}{rcl} G \times G & \rightarrow & G \\ (g, h) & \rightarrow & gh \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} G & \rightarrow & G \\ g & \rightarrow & g^{-1} \end{array}$$

sont différentiables.

Tout élément a d'un groupe G définit à l'aide des formules

$$L_a x = ax, \qquad R_a x{=}xa, \qquad x \in G$$

deux applications

$$L_a : G \rightarrow G \qquad R_a : G \rightarrow G$$

appelées respectivement translation à gauche et translation à droite. Les propriétés suivantes des translations sont évidentes :

$$L_e = R_e = id, \qquad \text{où } e \text{ l'unité du groupe } G$$

$$L_b \circ L_a = L_{ba}, \qquad R_a \circ R_b = \ L_a \circ R_b, \qquad\qquad L_a \circ R_b = R_b \circ L_a$$

En particulier, on voit (puisque $L_a \circ L_{a^{-1}} = L_{a^{-1}} \circ L_a = L_e = id$ et $R_a \circ R_{a^{-1}} =$

$R_{a^{-1}} \circ R_a = R_e = id$) que chaque translation est une application bijective et de plus que

$$L_a^{-1} = L_{a^{-1}}, \qquad R_a^{-1} = R_{a^{-1}},$$

pour tout élément $a \in G$.

Définition 1.1.3 *On appelle algèbre de Lie une algèbre $\mathcal{G}$ munie d'une loi multiplication anti-commutative, c'est-à-dire que*

$$xy = -yx, \qquad \forall x, y \in \mathcal{G}$$

et telle que pour tout triple (x, y, z) de $\mathcal{G}$ on a la relation :

$$(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0$$

dite identité de Jacobi.

Soit $\mathcal{G}$ une algébre associative. Le crochet de Lie de deux éléments $x, y \in \mathcal{G}$ se définit par la formule

$$[x, y] = xy - yx.$$

Ceci exprime que $\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie pour l'opération

$$(x, y) \to [x, y].$$

Le crochet de Lie possède les propriétés suivantes :

Proposition 1.1.1 $\forall (X, Y, Z) \in \Gamma^\infty(M)$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ *et* $\forall f,\ g \in \mathcal{F}^\infty(M)$, *on a*

- $[X\ ,\ Y] = -[X\ , Y]$,
- $[\lambda X + \mu Y,\ Z] = \lambda[X\ , Z] + \mu[Y\ , Z]$ *et* $[X,\ \lambda Y + \mu Z] = \lambda[X\ , Y] + \mu[X\ , Z]$,
- $[X\ ,\ [Y\ , Z]] + [Y\ ,\ [Z\ , X]] + [Z\ ,\ [X\ , Y]] = 0$ *(identité de Jacobi)*
- $[fX\ ,\ gY] = fg[X\ , Y] + f(X.g)Y - g(Y.f).X.$

Définition 1.1.4 *On dit qu'un champ de vecteurs $U \in \chi(G)$ est invariant á gauche si $L_x^* U = U$ pour tout élément $x \in G$ c'est-à-dire si*

$$U_b = (dL_{a^{-1}})_{ab}(U_{ab}), \qquad a, b \in G$$

L' expression locale du crochet de Lie est :

$$[X, Y] = (X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i}) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

On remarque que $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$. Ceci est une caractéristique des dérivations le long de coordonnées.

Définition 1.1.5 *Nous définissons alors l'algèbre de Lie du groupe de Lie $\mathcal{G}$, comme étant l'espace vectoriel des champs de vecteurs invariants à gauche sur G muni du crochet de Lie des champs de vecteurs, qui est bien interne. C'est bien une algèbre de Lie (sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie de dimension infinie des champs de vecteurs sur G).*

1.1.3 Connexion riemannienne

Une métrique riemannienne sur une variété M est la donnée, pour tout point $p \in M$, d'un produit scalaire g sur l'espace tangent T_pM tel que, pour tout couple (X, Y) de champs de vecteurs locaux sur M, la fonction $p \mapsto g_p(X, Y)$ est différentiable.

Définition 1.1.6 *Soit M une variété différentiable. Une connexion (linéaire) sur M est une application*

$$\begin{aligned} \nabla : \ & \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M) \\ & (X, Y) \to \nabla_X Y \end{aligned}$$

vérifiant les propriétés :

(*a*) $\nabla_X Y$ *est $C^\infty(M)$-linéaire par rapport à X :*

$$\nabla_{fX_1 + gX_2} Y = f \ \nabla_{X_1} Y + g \nabla_{X_2} Y \ , \qquad f, g \in C^\infty(M)$$

(b) $\nabla_X Y$ *est* $\mathbb{R}$*-linéaire par rapport á* Y :

$$\nabla_X(aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2 \qquad\qquad a, b \in \mathbb{R}$$

(c) vérifie la règle de Leibniz :

$$\nabla_X(fY) = f\ \nabla_X Y + X(f)Y, \qquad\qquad f \in C^\infty(M)$$

$\nabla_X Y$ *est appelée la dérivée covariante de* Y *dans la direction de* X.

Remarque 1.1.1 *Bien que la connexion soit définie par son action sur des champs de vecteurs globaux, il découle immédiatement de la définition que c'est un opérateur local.*

Lemme 1.1.1 *Soit* ∇ *connexion linéaire sur* M*, soient* X, Y *sont deux champs de vecteurs sur* M *et* $x \in M$*. Alors :*

i) $\nabla_X Y_{/x}$ *dépend seulement des valeurs de* X *et de* Y *au voisinage de* x *.*

ii) $\nabla_X Y_{/x}$ *dépends seulement des valeurs de* X *en* x*.*

Proposition 1.1.2 *Toute variété admet une connexion linéaire*

Dans un système de coordonnées $(x^1, x^2, ..., x^n)$ une connexion linéaire est déterminée par les symboles de **Christoffel** (Γ_{ij}^k) donnés par :

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

Lemme 1.1.2 *Soit* ∇ *une connexion sur* M*. Toute courbe* $c : I \to M$ *,* ∇ *détermine un unique opérateur*

$$D_c : \chi(c) \to \chi(c),$$

qui vérifie :

i) Linéarité sur $\mathbb{R}$

$$D_c(aV + bW) = aD_cV + bD_cW, \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

ii) Règle de Leibniz

$$D_c(fV) = \dot{f}V + fD_cV \qquad f \in C^\infty(I)$$

D_cV *est appelée dérivée covariante de* V *le long de* c.

Sur une variété riemannienne il existe une connexion naturelle compatible avec la métrique riemannienne. Le lemme suivant explique ce que pourra signifier la compatiblité entre une métrique et une connexion.

Lemme 1.1.3 *Soit* ∇ *une connexion sur une variété riemannienne* (M, g). *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) g *est compatible avec* ∇ *i-e pour tout* X, Y, Z *on a*

$$X.g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

2) Si V, W *sont deux champs de vecteurs le long d'une courbe* c

$$\frac{d}{dt} g(V, W) = g(D_cV, W) + g(V, D_cW)$$

3) Si V, W *sont deux champs de vecteurs parallèle long d'une courbe* c, *alors* $g(V, W)$ *est constante*

4) Le transport parallèle $P_{t_0 t_1} : T_{c(t_0)}M \to T_{c(t_1)}M$ *est une isométrie*

Théorème 1 *Soit* (M, g) *une variété riemannienne. Alors il existe une unique connexion sur* M *compatible avec* g *et sans torsion i-e.*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

Cette connexion est appelée ***la connexion de Levi-Civita*** *associée à la métrique* g.

1.2 Variétés sous-riemanniennes

La géométrie sous-riemannienne a émergé dans les derniéres années comme un domaine de recherche a part entière, avec des motivations et des ramifications dans plusieurs branches des mathématiques pures et appliquées. En plus de la théorie du contrôle, citons la géométrie riemannienne (dont la géométrie sous-riemannienne est une généralisation), la mécanique non-holonome, la théorie des diffusions sur les variétés, l'analyse des opérateurs hypoelliptiques où la géométrie de Cauchy-Riemann.

Soit M une variété différentielle connexe de classe C^∞. On note TM (respectivement T^*M) son fibré tangent (respectivement cotangent). Rappelons alors les définitions suivantes :

1.2.1 Distribution horizontale

Définition 1.2.1 *Une* ***distribution horizontale*** $\mathcal{H}$ *sur* M *est un sous-fibré de* TM*, c'est-à-dire la donnée d'une correspondance qui* $x \in M$ *associe un sous espace vectoriel* $\mathcal{H}_x$ *de* T_xM*. Une distribution* $\mathcal{H}$ *est dite de classe* C^∞ *; s'il existe une famille* χ *de champs de vecteurs sur* M *telle que* $\mathcal{H}_x$ *est engendré par la famille* $X(x)$ *pour tout* $x \in M$ *et tout* $X \in \chi$*. On dit qu'une distribution est régulière si la dimension de* $\mathcal{H}_x$ *est constante pour tout* $x \in M$*.*

Définition 1.2.2 *Une sous variété* N *de* M *est dite* ***variété intégrale*** *d'une distribution* $\mathcal{H}$ *si, pour tout* $x \in N$*, l'espace tangent* T_xN *est exactement* $\mathcal{H}_x$*. Si* $\mathcal{H}$ *est* C^∞*, on dit qu'elle est intégrable si pour tout* $x \in M$ *, il existe une variété intégrale* N *de* $\mathcal{H}$ *telle que* $x \in N$*. Une variété intégrale connexe de* $\mathcal{H}$ *;* N*, est dite maximale si toute variété intégrale de rencontrant* N *est une sous variété ouverte de* N*. Soient une distribution* $\mathcal{H}$ *et* x *un point de* M*. L'espace vectoriel engendré par* $\mathcal{H}_x$ *et tous les crochets* *de Lie* $[X;Y]_x$ $(X;Y \in \mathcal{H})$ *ne dépendent que du point* x*. Pour chaque* x *de* M*, on définit la suite d'espaces vectoriels :* $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}, (\mathcal{H}_2)_x = (\mathcal{H}_1 + \sum_{X\in\mathcal{H}} [X, \mathcal{H}_1])_x, \ldots\ldots, (\mathcal{H}_k)_x = (\mathcal{H}_{k-1} + \sum_{X\in\mathcal{H}} [X, \mathcal{H}_k])_x$ *pour* $k \geq 2$ *, où* $[X, \mathcal{H}_k]$ *désigne le crochet de Lie de* $X \in \mathcal{H}$ *par tous les éléments de* $\mathcal{H}_{k-1}$ *: Cette suite est bien définie et ne dépend que de la valeur de* $\mathcal{H}_k$ *en* x*. Posons* $r_k(x) = dim(\mathcal{H}_k)_x$ *pour* $k \geq 1$*. La suite d'entiers* $r_k(x)$ *est croissante et majorée par* m*.*

Définition 1.2.3 *On dit que* $\mathcal{H}$ *vérifie* ***la condition de Hörmander*** *si, pour tout* $x \in M$*, il existe un entier* k_0 *tel que* $r_k(x) = m$ $(m = dim(M))$ *pour tout* $k \geq k_0$*. Soit* $\mathcal{H}$ *une distribution vérifiant la condition de Hörmander et* $k_0(x)$ *le minimum des entiers* k *pour lesquels* $r_k(x) = m$*. Le* k_0*-uple*$(r_1(x), r_2(x), \ldots., r_{k_0}(x))$ *s'appelle le vecteur de croissance en* x

Définition 1.2.4 *On dit que* $\mathcal{H}$ *vérifie* ***la condition*** $\boldsymbol{H_2}$ ***forte*** *si, pour tout* X *non nul de* $\mathcal{H}$*, l'espace vectoriel* $(\mathcal{H} + \sum [X, \mathcal{H}])_x$ *est égal à* T_xM *pour tout* x *de* M*. Dans ce cas, le vecteur de croissance en* x *est égal à* $(r_1(x); m)$ *pour tout* x *de* M*.*

Définition 1.2.5 *(**Condition de rang**) On dit que* $\mathcal{H}$ *satisfait la condition du rang si*

$$(Lie(\mathcal{H}))_x = T_xM, \qquad \forall x \in M$$

Définition 1.2.6 *Une distribution* $\mathcal{H}$ *sur* M *sera dite* ***involutive*** *si pour tous les champs de vecteurs* $X, Y \in \mathcal{H}$*, le crochet de Lie* $[X, Y] \in \mathcal{H}$*.*

Théorème 2 *(de Frobenius). Soit* $\mathcal{H}$ *une distribution différentiable de dimension* p*. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathcal{H}$ *intégrable*
2. $\mathcal{H}$ *involutive*

1.2.2 Courbe horizontale

Définition 1.2.7 *Une courbe horizontale est courbe absolument continue* $\phi : I \to M$ *telle que :*

$$\dot{\phi}(t) \in \mathcal{H}_{\phi(t)} \qquad \forall t \in I$$

Lemme 1.2.1 *Soit* $(\mathcal{H}, g)$ *est une structure sous-riemannienne. Pour tout couple ordonné* (P, Q) *de points de* M *, il existe une courbe horizontale* $\phi : [a, b] \to M$ *telle que* $\phi(a) = P$ *et* $\phi(b) = Q$

Définition 1.2.8 *La longueur de la courbe* $\phi : [a, b] \to M$ *est définie par :*

$$L(\phi) = \int_a^b \sqrt{g_{\phi(s)}(\dot{\phi}(s), \dot{\phi}(s))} ds,$$

et l'énergie de la courbe $\phi : [a, b] \to M$ *est définie par :*

$$E(\phi) = \frac{1}{2} \int_a^b g_{\phi(s)}(\dot{\phi}(s), \dot{\phi}(s)) ds$$

1.2.3 Métrique sous-riemannienne

Définition 1.2.9 *Une forme quadratique* g_x *définie positive sur* $\mathcal{H}_x$ *s'appelle métrique sous -riemannienne associée au système de champ de vecteurs* $X_1, X_{2,}.........., X_n$.

Définition 1.2.10 *Une structure sous-riemannienne (ou encore, de Carnot-Carathéodory) sur une variété différentielle* M *de classe* C^∞*, est couple* $(\mathcal{H}, g)$ *d'une distribution* $\mathcal{H}, C^\infty$*, satisfaisant la condition de rang munie de métrique riemannienne* $g(x)$*, sur les fibrés de cette distribution telles que l'application* $x \to g(x)$ *soit de classe* C^∞*. Le triplet* $(M, \mathcal{H}, g)$ *s'appelle une variété sous-riemannienne.*

1.2.4 Distance de Carnot-Carathéodory

Etant donnée une structure sous-riemannienne $(M, \mathcal{H}, g)$, le lemme de Chow nous permet de définir une fonction distance d_ϕ sur M

$$d_\phi(P,Q) = \inf \left\{ l(\phi), \phi(a) = P,\ \phi(b) = Q,\ \dot{\phi} \in H_x \right\}$$

Il est clair que d_ϕ satisfait les axiomes de la distance :

$$\begin{aligned} d_\phi(P,P) &= 0 \\ d_\phi(P,Q) &= d_\phi(Q,P) \\ d_\phi(P,R) &\leq d_\phi(P,Q) + d_\phi(Q,R) \end{aligned}$$

Chapitre 2

Quelques connexions associées aux variétés sous-riemanniennes

2.1 Introduction

En général il n'existe pas en géométrie sous-riemannienne une connexion canonique comme dans le cas de la géométrie riemannienne. Dans ce chapitre nous allons introduire quelques types de connexions et nous étudions leurs propriétés. Nous commencons par introduire un exemple naturel de connexion linéaire et nous introduisons ensuite un concept de connexion en utilisant la connexion 1-forme. La connexion linéaire est un objet géométrique qui permet de mesurer le rang de changement d'un champ de vecteurs dans la direction d'un autre champ de vecteurs.

2.2 Connexion horizontale

Définition 2.2.1 *Soient $(M, \mathcal{H}, g)$ une variété sous-riemannienne et $E = \{E_1, E_2, ...E_n\}$ une base orthonormale sur $\mathcal{H}$. On définit la connexion horizontale*

$$D : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

par

$$(V,W) \to D_V W = \sum_{k=1}^{n} V\,g(W,E_k)E_k.$$

Lemme 2.2.1 *La définition précédente est correcte dans le sens qu'elle ne dépend pas de la base choisie.*

Preuve. Soit $\bar{E} = \left\{\bar{E}_1, \bar{E}_2, ..., \bar{E}_n\right\}$ une autre base orthonormale, il existe alors une matrice $A \in O(n)$ telle que : $\bar{E} = AE$. Alors

$$\begin{aligned}
\bar{D}_V W &= \sum_{k=1}^{n} V\,g(W,\bar{E}_k)\bar{E}_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} V\,g(W,A_{kj}E_j)A_{jk}E_j \\
&= \sum_{k,j=1}^{n} A_{kj}^2 V\,g(W,Ej)E_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} ((\sum_{k=1}^{n} A_{kj}^2)V\,g(W,E_j)E_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} V\,g(W,E_j)E_j \\
&= D_V W
\end{aligned}$$

En particulier on peut prendre $E_k = X_k, \quad k = 1,...n$ à condition que g soit une métrique sous-riemannienne telle que :

$$g(X_j, X_k) = \delta_{jk}$$

d'où

$$D_V W = \sum_{k=1}^{n} V\,g(W,X_k)X_k$$

où V et W sont deux champs vecteurs horizontaux et $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ sont les champs vecteurs qui engendrent $\mathcal{H}_x$.

Proposition 2.2.1 *D est une connexion linéaire, i.e, elle est $\mathbb{R}$-linéaire par rapport à* *ces deux arguments, $\mathcal{F}(M)$-linéaire par rapport au premier argument, et satisfait la règle de Leibniz de différentiation par rapport au second argument, i.e, on a :*

$$D_V(fW) = V(f)W + fD_VW, \qquad \forall f \in \mathcal{F}(M).$$

Preuve. Les deux premières propriétés sont évidentes. Vérifions la règle de Leibniz. Nous avons :

$$\begin{aligned} D_V(fW) &= \sum_{k=1}^{n} Vg(fW, X_k)X_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} V(fg(W, X_k))X_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} V(f)g(W, X_k)X_k + f\sum_{k=1}^{n} Vg(W, X_k)X_k \\ &= V(f)\sum_{k=1}^{n} g(W, X_k)X_k + fD_VW \\ &= V(f)W + fD_VW. \end{aligned}$$

où nous avons utilisé $W = \sum_{k=1}^{n} g(W, X_k)X_k$.

Proposition 2.2.2 *La connexion D est une connexion métrique, i.e.*

$$Ug(V, W) = g(D_UV, W) + g(V, D_UW), \qquad \forall U, V, W \in \Gamma(\mathcal{H})$$

Preuve. Soit ($X_1, X_2, ...X_n$) un système orthonormal horizontal .Si $U = \sum_j U^j X_j$,alors $U^j = g(U, X_j)$.Si $V = \sum V^i X_i$, alors $g(U, V) = \sum_i U^i V^i$. Avec cette notation nous avons :

$$\begin{aligned}
g(D_UV,W)+g(V,D_UW) &= g(\sum_{i=1}^{n}U(V^i)X_{i,}\sum_{j=1}^{n}W^jX_j)+g(\ V^iX_i,\sum_{j=1}^{n}U(W^j)X_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}U(V^i)W^j\delta_{ij}+\sum_{i=1}^{n}V^iU(W^j)\delta_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n}U(V^i)W^i+\sum_{i=1}^{n}V^iU(W^i) \\
&= U(\sum_{i=1}^{n}V^iW^i) \\
&= Ug(V,W)
\end{aligned}$$

Corollaire 2.2.1 *Si $V\in\Gamma(\mathcal{H})$ tels que $|V|_g$ est constant, alors D_UV est perpendiculaire àV pour n'importe quel $U\in\Gamma(\mathcal{H})$. En particulier, les courbes horizontales $c(s)$ avec la vitesse constante ont l'accélération $D_{\dot{c}}\dot{c}$ perpendiculaire à la vitesse $\dot{c}$*

Preuve. On pose $V=W$ dans la proposition (2.2.2).

Le résultat suivant donne l'expression du crochet de Lie en coordonnées locales

Proposition 2.2.3 *Soient $U=\sum_{i=1}^{n}U^iX_i$ et $V=\sum_{i=1}^{n}V^iX_i$ deux champs de vecteurs horizontaux sur $\mathcal{H}$. Alors*

$$[U,V] = \sum_{j=1}^{n}(U(V^j)-V(U^j))X_j+\sum_{i,j=1}^{n}U^iV^j\left[X_i,X_j\right].$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
[U,V] &= UV-VU \\
&= (U^iX_i)(V^jX_j)-(V^jX_j)(U^iX_i) \\
&= U^iX_i(V^j)X_j+U^iV^jX_iX_j-V^jX_j(U^i)X_i-V^jU^iX_jX_i \\
&= U(V^j)X_j+U^iV^jX_iX_j-V(U^i)X_i-V^jU^iX_jX_i \\
&= U(V^j)X_j-V(U^i)X_i+U^iV^j(X_iX_j-X_jX_i) \\
&= (U(V^j)-V(U^j))X_j-U^iV^j\left[X_i,X_j\right]
\end{aligned}$$

2.3 Torsion de la connexion horizontale

Définition 2.3.1 *On définie la torsion T de la connexion horizontale D comme une application*

$$T:\Gamma(\mathcal{H})\times\Gamma(\mathcal{H})\rightarrow\Gamma(TM)$$

donnée par :

$$T(U,V)=D_UV-D_VU-[U,V]$$

Le résultat suivant donne l'expression de la torsion en coordonnées locales

Proposition 2.3.1 *Soit $\{X_1,X_2...,X_k\}$une base orthonormale horizontale sur $\mathcal{H}$, et $U=\sum U^iX_j$ et $V=\sum V^iX_j$ deux champs de vecteurs horizontaux. Alors :*

$$\begin{aligned} T(U,V) &= -\sum_{i,j=1}^{k} U^iV^j\,[X_i,X_j] \\ &= -\sum_{i<j}^{k}(U^iV^j-U^jV^i)\,[X_i,X_j] \end{aligned}$$

Preuve. On calcule d'abord la différence symétrique des connexions

$$\begin{aligned} D_UV-D_VU &= \sum U(V^i)X_i-\sum V(U^i)X_i \\ &= \sum(U(V^i)-V(U^i))X_i \end{aligned}$$

En utilisant les propositions(2.2.3)et (2.3.1), on a :

$$\begin{aligned} T(U,V) &= D_UV-D_VU-[U,V] \\ & \sum(U(V^i)-V(U^i))X_i-\sum(U(V^j)-V(U^j))X_j-\sum U^iV^j\,[X_i,X_j] \\ & -\sum U^iV^j\,[X_i,X_j] \end{aligned}$$

La deuxième partie suit l'anti-symétrique du crochet de Lie.

Remarque 2.3.1 *On a :*

$$T(U,V) = -\sum_{i<j} \det \begin{pmatrix} U^i & U^j \\ V^i & V^j \end{pmatrix} [X_i, X_j]$$

Proposition 2.3.2 *La torsion T de la connexion horizontale D a les propriétés anti-symétrique du tenseur i.e.Pour chaque $U, V, W \in \Gamma(\mathcal{H})$ et $f \in \mathcal{F}(M)$, nous avons :*

$$\begin{array}{ll} (1) & T(U,V) = -T(V,U) \\ (2) & T(fU,V) = fT(U,V) \\ (3) & T(U,fV) = fT(U,V) \\ (4) & T(\alpha U + \beta W, V) {=} \alpha T(U,V) + \beta T(W,V), \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{array}$$

Preuve.(1) En utilisant la définition de la torsion et l'anti-symétrique du crochet de Lie

$$\begin{aligned} T(U,V) + T(V,U) &= D_U V - D_V U - [U,V] + D_V U - D_U V - [V,U] \\ &= -([U,V] + [V,U]) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(2) Soit $f \in \mathcal{F}(M)$.On a

$$\begin{aligned} T(fU,V) &= -\sum_{i,j=1}^{k} (fU^i) V^j \, [X_i, X_j] \\ &= -f \sum_{i,j=1}^{k} U^i V^j \, [X_i, X_j] \\ &= fT(U,V) \end{aligned}$$

(3) de même façon que (2)

(4) On suit la proposition(2.3.1)où bilinéarités du connexion D et le crochet de Lie

2.4 Divergence horizontale

Définition 2.4.1 *Soit Z un champ de vecteurs horizontale , on définit la divergence horizontale de Z comme la trace de la connexion horizontale*

$$\mathrm{div}_{\mathcal{H}} Z = Trace(V \to D_V Z)$$

Proposition 2.4.1 *En utilisant les champs des vecteurs horizontaux, la divergence horizontale peut être exprimée comme suit :*

$$\mathrm{div}_{\mathcal{H}} Z = \sum_{j=1}^{n} X_j(Z^j)$$

où $Z = \sum_{j=1}^{n} Z^j X_j \in \mathcal{H}$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_{\mathcal{H}} Z &= \sum_{j=1}^{n} g(X_j, D_{X_j} Z) \\
&= \sum_{j=1}^{n} g(X_j, \sum^{n} X_j g(Z, X_i) X_i) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} X_j g(Z, X_i) g(X_j, X_i) \\
&= \sum_{j=1}^{n} X_j \ g(Z, X_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} X_j(Z^j)
\end{aligned}$$

Proposition 2.4.2 *Si* $\nabla_X f = \sum_{k=1}^{n} X_k(f) X_k$*, est le gradient de* f*, alors*

$$\mathrm{div}_{\mathcal{H}} \nabla_X f = 2\Delta_X f$$

Preuve. C'est juste un calcul qui utilise la proposition présédente

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}_{\mathcal{H}} \nabla_X f &= \sum_{j=1}^{n} X_j(\nabla_X f\ )^j \\
&= \sum_{j=1}^{n} X_j X_j(f) \\
&= 2\Delta_X f
\end{aligned}$$

2.5 Courbures

2.5.1 Courbure de Cartan

Soit $x \longmapsto \mathcal{H}_x = \mathrm{Vect}_x(\ X_1, X_2, ...X_n)$ une distribution horizontale sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.5.1 *La connexion* **1- *forme*** *est une forme* $\omega \in T^*\ \mathbb{R}^n$ *telle que*

$$\begin{aligned}
\omega &\neq 0 \\
\ker_x \omega &= \mathcal{H}_x.
\end{aligned}$$

Cette connexion 1-forme est unique à un multiplicatif près.

Proposition 2.5.1 *Si* $x \longmapsto \mathcal{H}_x$ *est une distribution non-intégrable, alors localement, la connexion 1- forme n'est pas fermée* ($d\ \omega \neq 0$).

Preuve. On suppose que ω est fermée. Alors

$$\begin{aligned}
0 &= d\omega(U,V) = U\omega(V) - V\omega(U) - \omega([U,V]) \\
&= -\omega([U,V])
\end{aligned}$$

Pour $U = X_i$ et $V = X_j$, on obtent $\omega([X_i, X_j]) = 0$, contradiction car $\mathcal{H}$ non-intégrable.

D'où $d\ \omega \neq 0$

Définition 2.5.2 *La **courbure 2- formes** de la distribution est définie par*

$$\begin{aligned} \Omega: \ & \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{F} \\ & (X, Y) \longmapsto \Omega(X, Y) = d\omega(X, Y) \end{aligned}$$

La 2- formes est aussi appelée **courbure de Cartan** et mesure le degré de non-intégrabilité de la distribution horizontale.

2.5.2 Courbure sectionnelle

Définition 2.5.3 *Soit π un 2-plans. La courbure sectionnelle (de Cartan) le long de π est définie comme*

$$k_\pi = \Omega(X, Y).$$

où $\{X, Y\}$ est un système orthonormal dans π.

Lemme 2.5.1 *La définition précédente est correcte dans le sens qu'elle ne dépend pas du système choisie.*

Preuve. Soit $\left\{\bar{X}, \bar{Y}\right\}$ un autre système orthonormal dans π avec la même orientation que $\{X, Y\}$,alors

$$\Omega(X, Y) = \Omega(\bar{X}, \bar{Y})$$

En effet si

$$\begin{aligned} \bar{X} &= aX + bY \\ \bar{Y} &= cX + dY \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\Omega(\bar{X},\bar{Y}) &= \Omega(aX+bY,cX+dY)\\
&= ac\Omega(X,X)+ad\Omega(X,Y)+bc\Omega(Y,X)+bd\Omega(Y,Y)\\
&= (ad-bc)\Omega(X,Y)\\
&= \begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}\Omega(X,Y)\\
&= \Omega(X,Y)
\end{aligned}$$

où $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale. La courbure sectionnelle est définie pour chaque plan π non nécessairement horizontal dans ce cas.

2.5.3 Tenseur de courbure (1,1)

Définition 2.5.4 *L'application $\mathcal{K}:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ est définie comme suit :*

$$\mathcal{K}(U)=\sum_{k=1}^{n}\Omega(U,E_k)E_k,$$

s'appelle le tenseur de courbure $(1,1)$, où $\{E_1,E_2,......E_n\}$ est une base orthonormée sur la métrique de Carnot-Caratheodory .

$\mathcal{K}$ mesure la courbure le long de direction U, c'est en fait un tenseur parce que

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(\alpha_1U_1+\alpha_2U_2) &= \alpha_1\mathcal{K}(U_1)+\alpha_2\mathcal{K}(U_2)\\
\mathcal{K}(fU) &= \Omega(fU,X_k)X_k=f\mathcal{K}(U), \qquad \forall f\in\mathcal{F}
\end{aligned}$$

Remarque 2.5.1 *La définition de $\mathcal{K}$ ne dépend pas du choix des bases orthonormées.*

En effet, il ya une matrice orthogonale $A \in \mathcal{O}(n)$ *tel que* $E_k = A_{kj}X_j$ *de sorte que*

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(U) &= \sum_{k=1}^{n} \Omega(U, A_{kj}X_j)A_{kj}X_j \\ &= \sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n}(A_{kj})^2)\Omega(U, X_j)X_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \Omega(U, X_j)X_j\end{aligned}$$

Définition 2.5.5 *Si* $\phi(s)$ *une courbe horizontale, nous définissons le champ de vecteurs de courbure le long de* ϕ *comme* $\mathcal{K}(\dot{\phi})$

Proposition 2.5.2 *Dans le cas d'une variété de contact le champ de vecteurs de courbure est partout non-nul le long de la courbe horizontale.*

Preuve. Si ϕ est une courbe horizontale, alors

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(\dot{\phi}) &= \sum_{k=1}^{n} \Omega(\dot{\phi}, X_k)X_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \Omega(\dot{\phi}^j X_j, X_k)X_k \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} \dot{\phi}^j \Omega(X_j, X_k)X_j\end{aligned}$$

Supposons $\mathcal{K}(\dot{\phi}) = 0$ a une certaine point p, alors $\sum_{j=1}^{n} \dot{\phi}^j \Omega(X_j, X_p)_p = 0$ pour chaque $k = 1, 2, ..., n$. Si $\Omega_{ij} = \Omega(X_i, X_j)$ alors $(\Omega_{ij}\dot{\phi}^j)_p = 0$, ce qui est un un système homogène linéaire avec une solution $\dot{\phi}_p$ non nul, et suit cela $\det(\Omega_{ij})_p = 0$ (i-e Ω est une forme dégénéré). C'est une contradiction (Ω est une forme fermée non-dégénérée), d'où $\mathcal{K}(\dot{\phi}) \neq 0$

Définition 2.5.6 *La* ***courbure scalaire*** *(Cartan) d'une courbe horizontale* $\phi(s)$ *est la longueur du champ de vecteurs de courbure mesure dans la métrique sous-riemannienne*

$$k(\phi(s)) = \left|\mathcal{K}(\dot{\phi}(s))\right|_g$$

d'où
$$k^2(\phi(s)) = \sum_{k=1}^{n}\Omega(\dot{\phi}, X_k)^2$$

Le champ de vecteurs de courbure et la courbure scalaire (Cartan) peuvent être définies pour chaque courbe pas simplement pour les courbes horizontales. Si $c(s)$ est une courbe arbitraire, on définit le champ de vecteurs de courbure pour $c(s)$ comme $\mathcal{K}(\dot{c}^h)$ où $\dot{c}^h = proj_{\mathcal{H}}\dot{c}$

La relation entre les 2-formes Ω et la courbure directionnelle $\mathcal{K}$ est donné par le résultat suivant

Proposition 2.5.3 *Si g est une métrique de Carnot-Carathéodory, alors pour chaque $U, W \in \mathcal{H}$*
$$\Omega(U, W) = -g(U, \mathcal{K}(W))$$

Preuve.
$$\begin{aligned} g(U, \mathcal{K}(W)) &= g(U, \sum_{i=1}^{n}\Omega(W, E_i)E_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\Omega(W, E_i)g(U, E_i) \\ &= \Omega(W, \sum_{i=1}^{n}g(U, E_i)E_i) \\ &= \Omega(W, U) \\ &= -\Omega(U, W), \end{aligned}$$

ce qui prouve la proposition.

Corollaire 2.5.1 *Si $\mathcal{H} = vect\,\{X_1, X_2\}$ on a*
$$\Omega(X_1, X_2) = -g(X_1,\ \mathcal{K}(X_2))$$

Corollaire 2.5.2 *Pour chaque $U, W \in \mathcal{H}$ on a la relation suivante*
$$\omega([U, W]) = g(U, K(W))$$

Preuve. Comme

$$\begin{aligned}\Omega(U,W) &= d\omega(U,W)\\ &= \omega(U)-\omega(W)-\omega([U,W])\\ &= -\omega([U,W])\end{aligned}$$

donc

$$\omega([U,W]) = g(U,\mathcal{K}(W)), \qquad \forall U,W\in\mathcal{H}$$

Corollaire 2.5.3 *Pour chaque champ horizontal de vecteurs U on a :*

$$g(U,\mathcal{K}(U)) = 0$$

à savoir $\mathcal{K}(U)$ est normal à chaque U dans la métrique de Carnot-Carathéodory

Preuve. On pose $U = W$ dans la proposition(2.5.2).

$$\Omega(U,U) = -g(U,\mathcal{K}(U)) = 0$$

2.6 Applications sur le groupe de Heisenberg

2.6.1 Connexions sur le groupe de Heisenberg

Le groupe de Heisenberg de dimension 3 est un groupe de Lie nilpotent de rang 2 qu'on note $\mathbf{H}_1$ et peut être défini comme $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R} = \{(x,t)\}$ muni par la loi de groupe :

$$(x_1,x_2,t)*(x_1',x_2',t') = (x_1+x_1',\ x_2+x_2',\ t+t'-2(x_1x_2'-x_2x_1'))$$

On considère sur $\mathbb{R}^3$ les deux champs de vecteurs

$$X_1 = \partial_{x_1}+2x_2\partial_t, \qquad\qquad X_2 = \partial_{x_2}-2x_1\partial_t, \tag{1-1}$$

Soit $x \to \mathcal{H}_x = \mathrm{vect}_x \{X_1,\ X_2\}$ la distribution horizontale sur $\mathbb{R}^3$. La connexion 1-forme est la forme non nulle $\omega \in T^*\mathbb{R}^3$ telle que $\ker_x \omega = \mathcal{H}_x$. La forme ω est unique à un facteur multiplicatif près. On considère dans ce qui suit la 1-forme :

$$\omega = dt - 2(x_2 dx_1 - x_1 dx_2) \tag{1-2}$$

Définition 2.6.1 *La courbure 2-forme de la distribution $\mathcal{H}$ est définie par :*

$$\begin{array}{rrl} \Omega : & \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to & \mathcal{F}(\mathbb{R}^3) \\ & (U,\ V) \to & \Omega(U,\ V) = d\omega(U,\ V). \end{array} \tag{1-3}$$

Pour le groupe de Heisenberg la courbure 2-formes est :

$$\begin{aligned} \Omega &= d\omega \\ &= 4dx_1 \wedge dx_2. \end{aligned}$$

La courbure le long de la paire de vecteurs (X_1, X_2) est

$$\begin{aligned} \Omega(X_1, X_2) &= 4dx_1 \wedge dx_2(X_1, X_2) \\ &= 4 \begin{vmatrix} dx_1(X_1) & dx_1(X_2) \\ dx_2(X_1) & dx_2(X_2) \end{vmatrix} \\ &= 4 \begin{vmatrix} X_1(x_1) & X_2(x_1) \\ X_1(x_2) & X_2(x_2) \end{vmatrix} \\ &= 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 4 \end{aligned}$$

2.6.2 Courbure de la connexion

Proposition 2.6.1 *Soient $(\mathcal{H}, g)$ une variété de Heisenberg et $\mathcal{K}$ la courbure dérivée de la 1-forme ω. Alors*

$$g(\mathcal{K}(U), W) + g(U, \mathcal{K}(W)) = 0 \tag{1-4}$$

Preuve. Pour $U, W \in \mathcal{H}$

$$g(\mathcal{K}(U), W) + g(U, K(W)) = 0$$

Nous montrons d'abord que

$$g(\mathcal{K}(U), W) = \Omega(U, W) \tag{1-5}$$

et à l'aide de l'anti-symétrie de Ω, nous obtenons $(1-4)$. En effet :

$$\begin{aligned} g(\mathcal{K}(U), W) &= g(\sum_k \Omega(U, X_k) X_k, W) \\ &= \sum_k g(X_k, W) \Omega(U, X_k) \\ &= \Omega(U, W) \end{aligned}$$

Corollaire 2.6.1 *Pour tout $U \in \mathcal{H}$ on a*

$$g(\mathcal{K}(U), U) = 0 \tag{1-6}$$

Le dernier résultat suggère que dans le cas où la distribution a dimensions 2, la courbure $\mathcal{K}$ est proportionnelle, avec une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$

Définition 2.6.2 *Soit $\Im : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ une application définie par*

$$\Im(X_1) = X_2, \qquad \Im(X_2) = -X_1 \tag{1-7}$$

$\Im$ s'appelle la structure complexe du plan horizontal.

On a alors

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(X_1) &= \Omega(X_1, X_2)X_2 \\ &= \Omega(X_1, X_2)\Im(X_1)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(X_2) &= \Omega(X_2, X_1)X_1 \\ &= \Omega(X_1, X_2)\Im(X_2)\end{aligned}$$

Nous sommes arrivés à la formule suivante pour la courbure

$$\mathcal{K}(U) = \Omega(X_1, X_2)\Im(U), \qquad \forall U \in \mathcal{H} \tag{1-8}$$

la matrice Ω_{ij} est non dégénérée, alors $\mathcal{K}(U) \neq 0$ pour $U \neq 0$. Si V n'est pas un champ de vecteurs horizontal alors la courbure peut encore être définie comme :

$$\mathcal{K}(V) = \sum_k \Omega(V, X_k)X_k \tag{1-9}$$

Le côté de droite dépend seulement de la partie horizontale de$V$. En effet

Considérons le champ de vecteurs

$$V = V^1\partial_{x_1} + V^2\partial_{x_2} + V^3\partial_t$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
V &= V^1\partial_{x_1} + V^2\partial_{x_2} + V^3\partial_t \\
&= V^1(X_1 - 2x_2\partial_t) + V^2(X_2 + 2x_1\partial_t) + V^3\partial_t \\
&= V^1X_1 + V^2X_2 + (V^3 - 2x_2 + 2x_1)\partial_t \\
&= \underbrace{V^1X_1 + V^2X_2}_{=\ V_{\mathcal{H}}} + \omega(V)\partial_t \\
&= V_{\mathcal{H}}\ + \omega(V)\partial_t
\end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned}
\Omega(V, X_k) &= \Omega(V_{\mathcal{H}}\ + \omega(V)\partial_t, X_k) \\
&= \Omega(V_{\mathcal{H}}\ , X_k) + \omega(V)\underbrace{\Omega(\partial_t, X_k)}_{=0} \\
&= \Omega(V_{\mathcal{H}}\ , X_k)
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{K}(V) = \mathcal{K}(V_{\mathcal{H}}\ )$$

2.6.3 Courbures et géodésiques sous-riemanniennes

Il est possible de prouver que la courbure scalaire de Cartan le long de chaque courbe horizontale de vitesse d'unité sur $\mathbf{H}_1$ est constante. En particulier, la courbure scalaire le long des solutions du système d'Euler-Lagrange (les géodésiques sous-riemanniennes) seront constantes. La courbure Ω est décrite par une matrice dans le système des vecteurs$\{X_1, X_2\}$ comme

$$\Omega_{ij} = \Omega(X_i, X_j) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $c(s) = (x_1(s), x_2(s), t(s))$ une courbe horizontale, à savoir que $\dot{c}(s) = \dot{x}_1(s)X_1 +$

$\dot{x}_2(s)X_2$. Alors le vecteur de courbure est

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(\dot{c}) &= \Omega\dot{c} \\
&= \Omega_{ij}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\dot{x}_2 \\ -4\dot{x}_1 \end{pmatrix} \\
&= 4\Im(\dot{c}),
\end{aligned} \tag{1-10}$$

où $\Im$ est la structure complexe du plan .Un calcul montre que :

$$k^2(c(s) = |\mathcal{K}(\dot{c}(s))|_g^2 = 16\,|\Im(\dot{c})|_g^2 = 16(\dot{x}_1^2(s) + \dot{x}_2^2(s)) = 16 \tag{1-11}$$

Donc la courbure est constante et égale à 4 le long de chaque courbe horizontale dont la vitesse est l'unité

En général, les 2-formes décrivent la non-intégrabilité de la distribution horizontale. La paire $(\mathbb{R}^3, \omega)$ s'appelle une variété de contact si $\omega \wedge \Omega \neq 0$. Dans notre cas $\omega \wedge \Omega = 4dt \wedge dx_1 \wedge dx_2$ et par conséquent, le groupe de Heisenberg devient une variété de contact.

En utilisant la connexion de1-forme ω nous avons :

$$L(c, \dot{c}) = \frac{1}{2}g(c, \dot{c}) + \theta\omega(\dot{c}), \qquad c = (x_1, x_2, t) \tag{1-12}$$

Nous traitons maintenant un problème de minimisation avec des contraintes données par :

$$L(c, \dot{c}) = \frac{1}{2}g(c, \dot{c}) + \theta\omega(\dot{c})$$

Un calcul du système d'équations d'Euler-Lagrange montre que :

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{c}} = \frac{\partial L}{\partial c}, \qquad c = (x_1, x_2, t) \tag{1-13}$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= \dot{x}_1 - 2x_2\theta \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} &= \dot{x}_2 + 2x_1\theta \\
\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= \ddot{x}_1 - 2\theta\dot{x}_2 \\
\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} &= \ddot{x}_2 + 2\theta\dot{x}_1 \\
\frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2\theta\dot{x}_2 \\
\frac{\partial L}{\partial x_2} &= -2\theta\dot{x}_1
\end{aligned}$$

Alors l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial L}{\partial x_1}$$

devient

$$\ddot{x}_1 = 4\theta\dot{x}_2 \tag{1-14}$$

et l'équation

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\partial L}{\partial x_2}$$

devient :

$$\ddot{x}_2 = -4\theta\dot{x}_1 \tag{1-15}$$

Si la vitesse de la géodésique est donnée par :

$$\dot{c}(s) = \dot{x}_1(s)X_1 + \dot{x}_2(s)X_2$$

le systéme d'équations $(1-14)$ et $(1-15)$ d'Euler-Lagrange peut s'écrire comme

$$\ddot{x}_1 X_1 + \ddot{x}_2 X_2 = 4\theta(\dot{x}_2 X_1 - \dot{x}_1 X_2) \tag{1-16}$$

Le côté droit a le sens de courbure. En effet, en utilisant le côté droit on obtient

$$-\theta\Omega(X_{1,}X_2)\Im(\dot{c}) = -\theta\mathcal{K}(\dot{c}) \tag{1-17}$$

Pour le côté gauche on considère l'accélération définie par la connexion horizontale le long du $\dot{c}(s)$:

$$\begin{aligned} D_{\dot{c}}\dot{c} &= \sum_{k=1}^{2} \dot{c}g(\dot{c}, X_k)X_k \\ &= \dot{c}(\dot{x}_1)X_1 + \dot{c}(\dot{x}_2)X_2 \\ &= \ddot{x}_1 X_1 + \ddot{x}_2 X_2 \end{aligned} \tag{1-18}$$

D'où le système des équations d'Euler-Lagrange peut être écrit globalement comme

$$D_{\dot{c}}\dot{c} = -\theta\mathcal{K}(\dot{c}) \tag{1-19}$$

Dans la géométrie sous-riemannienne l'accélération du géodésique est égale à la courbure. Ceci garde la géodésique dans la distribution horizontale. Comme dans la géométrie riemannienne, nous avons :

Corollaire 2.6.2 *La longueur de la vitesse $\dot{c}$ dans la métrique sous-riemannienne est constante*

Preuve. Comme D est une connexion métrique, nous avons par le corollaire (2.6.1)

$$\begin{aligned} \dot{c}g(\dot{c}, D_{\dot{c}}\dot{c}) &= 2g(D_{\dot{c}}\dot{c}, \dot{c}) \\ &= -2\theta g(\mathcal{K}(\dot{c}), \dot{c}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Chapitre 3

Formalismes variationnels et connexions sous-riemanniennes

3.1 Introduction

La notion de géodésique est un concept qui provient du calcul des variations. Une géodésique est une courbe telle que son énergie $E = \int_0^1 \frac{1}{2} |\dot{c}(s)|^2 \, ds$ soit minimale entre deux points données. Il ya au moins deux types de contraintes qui peuvent agir sur les courbes : holonomes et non-holonomes (où horizontales). L'holonome peut être considérée comme une contrainte dont l'énergie est perturbée par un potentiel, c'est à dire l'énergie devient

$$E = \int_0^1 (\frac{1}{2} |\dot{c}(s)|^2 + U(c))ds.$$

Dans ce contexte l'équation des géodésiques est

$$\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = -U^{/}(c).$$

L'autre type de contraintes, c'est à dire "non- holonome" (où horizontale) sont des contraintes sur la vitesse de la courbe. L'énergie minimisante est alors :

$$E = \int_0^1 (\frac{1}{2} |\dot{c}(s)|^2 + \omega(\dot{c}))ds.$$

Dans ce chapitre on donne une version géométrique des équations fondamentales du calcul variationnel, à savoir, les équations d'Euler-Lagrange, les équations de Hamilton et les équations de Hamilton-Jacobi. On considère le cas où ω est une connexion 1-forme du type $(2-1)$ tels que $(2-3)$ soit non nulle. L'idée principale de ce tavail est de considérer les solutions du système des équations d'Euler-Lagrange comme des géodésiques pour une certaine connexion sous une certaine perturbation, donnée par le tenseur de courbure défini dans le deuxième chapitre. Puis, on prouve qu'on peut toujours obtenir une équation du type Hamilton-Jacobi lorsque le gradient est modifié par un gradient horizontal.

Dans tout ce qui suit, on suppose que La distribution horizontale est donnée par le noyau d'une 1-forme, c'est à dire $\mathcal{H} = Ker\omega$. Il est connu que dans ce cadre, la condition de Frobenius est équivalente à $d\omega \neq 0$.Ce qui signifie que la courbure de Cartan est non nulle. Cette condition est également équivalente à la non-intégrabilité de la distribution $\mathcal{H}$.

3.2 Problème sous-riemannien

Considérons la distribution non-intégrable $x \mapsto \mathcal{H}_x$ de dimension 2 sur $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2_{(x_1,x_2)} \times \mathbb{R}_t$. Comme $\mathcal{H} = \ker \omega$, telle que ω est la connexion 1-forme sur $\mathbb{R}^3$. Supposons que la 1-forme ω s'écrit sous la forme

$$\omega = \omega^1 dx_1 + \omega^2 dx_2 + \omega^3 dt,$$

avec $\omega^3 \neq 0$ de sorte que

$$\omega = -A_1(x)dx_1 + A_2(x)dx_2 + dt. \tag{2-1}$$

On peut vérifier facilement que

$$\omega(X_1) = \omega(X_2) = 0,$$

où

$$X_1 = \partial_{x_1} + A_1(x)\partial_t \qquad , \quad X_2 = \partial_{x_2} - A_2(x)\partial_t. \tag{2-2}$$

La connexion 2-forme est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \Omega &= d\omega \\ &= -(\tfrac{\partial A_1}{\partial x_1}dx_1 + \tfrac{\partial A_1}{\partial x_2}dx_2) \wedge dx_1 + (\tfrac{\partial A_2}{\partial x_1}dx_1 + \tfrac{\partial A_2}{\partial x_2}dx_2) \wedge dx \\ &= -\tfrac{\partial A_1}{\partial x_2}dx_2 \wedge dx_1 + \tfrac{\partial A_2}{\partial x_1}dx_1 \wedge dx_2 \\ &= (\tfrac{\partial A_1}{\partial x_2} + \tfrac{\partial A_2}{\partial x_1})dx_1 \wedge dx_2 \ . \end{aligned} \tag{2-3}$$

Supposons que Ω est non nulle. Alors

$$[X_1, X_2] = -(\frac{\partial A_1}{\partial x_2} + \frac{\partial A_2}{\partial x_1})\partial_t \notin \mathcal{H} \tag{2-4}$$

d'où $\mathcal{H}$ est non-intégrable d'après le théorème de Frobenius.

On se donne une métrique $g : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{F}$ définie positive pour laquelle les deux champs de vecteurs $\{X_1, X_2\}$ soient orthonormés. g constitue alors une métrique sous riemannienne qui est définie par X_1, X_2.

Rappelons qu'une courbe: $x \longrightarrow c(s) = (x_1(s), x_2(s), t(s))$ est horizontale si

$$\dot{c}(s) \in \mathcal{H}_{c(s)}.\text{ pour chaque } s.$$

Comme nous avons :

$$\begin{aligned}
\dot{c}(s) &= \dot{x}_1(s)\partial_{x_1} + \dot{x}_2(s)\partial_{x_2} + \dot{t}(s)\partial_t \\
&= \dot{x}_1(s)(X_1 - A_1(x)\partial_t) + \dot{x}_2(s)(X_2 + A_2(x)\partial_t + \dot{t}(s)\partial_t \\
&= \dot{x}_1(s)X_1 + \dot{x}_2(s)X_2 + (\dot{t}(s) - A_1(x)\dot{x}_1(s) + A_2(x)\dot{x}_2(s))\partial_t \\
&= \dot{x}_1(s)X_1 + \dot{x}_2(s)X_2 + \omega(\dot{c}(s))\partial_t,
\end{aligned}$$

alors la courbe c est horizontale pour $\mathcal{H}$ ssi :

$$\omega(\dot{c}) = \dot{t}(s) - A_1(c)\dot{x}_1 + A_2(c)\dot{x}_2 = 0. \tag{2-5}$$

La longueur de c par rapport à la métrique g est :

$$\begin{aligned}
l(c) &= \int_0^1 \sqrt{g(\dot{c}(s)), g(\dot{c}(s))} ds & \text{(2-6)} \\
&= \int_0^1 \sqrt{\dot{x}_1(s)^2 + \dot{x}_2(s)^2} ds, & \text{(3.1)}
\end{aligned}$$

et la distance de Carnot-Carathéodory est donnée par

$$d_c(O, P) = \inf \{l(c), c(0) = O, c(1) = P, \quad c \text{ horizontale}\} \tag{2-7}$$

Dans ce cadre une courbe horizontale de longueur minimale est appelée g**éodésique sous-riemannienne** et peut être décrite à l'aide du formalisme de Hamiltonien comme suit :

Introduisons la fonction de Hamilton $H : T^*_{(x,t)}\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$H(\varepsilon, \theta, x, t,) = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + A_1(x)\theta)^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_2 - A_2(x)\theta)^2. \tag{2-8}$$

Dans ce contexte, il est bien connu qu'en géométrie sous-riemannienne, une géodésique entre l'origine et (x, t) est une projection sur l'espace (x, t) d'une solution du système hamiltonnien,

$$\begin{cases} \dot{x} = H_{\varepsilon} \\ \dot{t} = H_{\theta} \\ \dot{\varepsilon} = -H_x \\ \dot{\theta} = -H_t \end{cases} \tag{2-9}$$

avec les conditions aux limites

$$x(0) = t(0) = 0, \qquad x(1) = x, t(1) = t, \tag{2-10}$$

De l'équation

$$\dot{t} = H_{\theta},$$

nous avons :

$$\dot{t}(s) = A_1(x)\dot{x}_1 - A_2(x)\dot{x}_2 \tag{2-11}$$

En effet ;

$$\begin{aligned} \dot{t} &= H_{\theta} \\ &= A_1(x)(\varepsilon_1 + A_1(x)\theta) - A_2(x)(\varepsilon_2 - A_2(x)\theta) \\ &= A_1(x)\dot{x}_1 - A_2(x)\dot{x}_2 \end{aligned}$$

C'est-à-dire, les géodésiques sous -riemanniennes sont des courbes horizontales.

3.3 Formulation lagrangienne et connexion

Nous associerons au hamiltonien $(2-8)$, un lagrangien $L : T\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, qui est en fait une transformation de Legendre :

$$(x, t, \dot{x}, \dot{t}) \to (\varepsilon, \theta, \dot{x}, \dot{t}),$$

$$\begin{aligned} L(x,t,\dot{x},\dot{t}) &= \max_{\varepsilon,\theta}(\varepsilon_1\ \dot{x}_1 + \varepsilon_2\ \dot{x}_2 + \theta\dot{t} - H(\varepsilon,\theta,x,t)) \\ &= \max_{\varepsilon,\theta} F(x,t,\dot{x},\varepsilon,\theta). \end{aligned}$$

Si le maximum est atteint, on aura :

$$\begin{cases} \partial_\varepsilon F = 0 \\ \partial_\theta F = 0 \end{cases} \tag{2-12}$$

Les équations $(2-12)$ peuvent être écrites successivement comme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \partial_{\varepsilon_1} H \\ \dot{x}_2 = \partial_{\varepsilon_2} H \\ \dot{t} = \partial_\theta H = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varepsilon_1 + A_1(x)\theta \\ \dot{x}_2 = \varepsilon_2 - A_2(x)\theta \\ \dot{t} = A_1(x)\ \dot{x}_1 - A_2(x)\dot{x}_2 \end{cases} \tag{2-13}$$

En utilisant les équations $(2-13)$, le lagrangien devient

$$\begin{aligned} L(x,t,\dot{x},\dot{t}) &= \varepsilon_1\ \dot{x}_1 + \varepsilon_2\ \dot{x}_2 + \theta\dot{t} - H(\varepsilon,\theta,x,t) \\ &= (\dot{x}_1 - A_1(x)\theta)\dot{x}_1 + (\dot{x}_2 + A_2(x)\theta)\dot{x}_2 + \theta\dot{t} - \tfrac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) \\ &= \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - A_1(x)\theta\dot{x}_1 + A_2(x)\theta\dot{x}_2 + \theta\dot{t} - \tfrac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) \\ &= \tfrac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \theta(\dot{t} - A_1(x)\dot{x}_1 + A_2(x)\dot{x}_2), \end{aligned} \tag{2-14}$$

où θ est une constante parce que

$$\dot{\theta} = -\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{dH}{dt} = 0. \tag{2-15}$$

En utilisant la connexion 1-forme ω, on peut écrire

$$L(c,\dot{c}) = \frac{1}{2}g(c,\dot{c}) + \theta\omega(\dot{c}).$$

Nous traitons maintenant le problème de minimisation avec des contraintes données par

$$L(c,\dot{c}) = \frac{1}{2}g(c,\dot{c}) + \theta\omega(\dot{c}), \tag{2-16}$$

où $c = (x_1, x_2, t)$

Le système d'équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{c}} = \frac{\partial L}{\partial c}\ , \qquad\qquad c = (x_1, x_2, t) \tag{2-17}$$

donne

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= \dot{x}_1 - \theta A_1(x) \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} &= \dot{x}_2 + \theta A_2(x) \\
\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= \ddot{x}_1 - \theta\frac{\partial A_1(x)}{\partial x_1}\dot{x}_1 - \theta\frac{\partial A_1(x)}{\partial x_2}\dot{x}_2 \\
\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} &= \ddot{x}_2 + \theta\frac{\partial A_2(x)}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \theta\frac{\partial A_2(x)}{\partial x_2}\dot{x}_2 \\
\frac{\partial L}{\partial x_1} &= -\theta\frac{\partial A_1(x)}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \theta\frac{\partial A_2(x)}{\partial x_1}\dot{x}_2 \\
\frac{\partial L}{\partial x_2} &= -\theta\frac{\partial A_1(x)}{\partial x_2}\dot{x}_1 + \theta\frac{\partial A_2(x)}{\partial x_2}\dot{x}_2
\end{aligned}$$

Alors l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial L}{\partial x_1}$$

devient

$$\ddot{x}_1 = \theta(\frac{\partial A_1}{\partial x_2} + \frac{\partial A_2}{\partial x_1})\dot{x}_2 \tag{2-18}$$

et

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\partial L}{\partial x_2}$$

devient

$$\ddot{x}_2 = -\theta(\frac{\partial A_1}{\partial x_2} + \frac{\partial A_2}{\partial x_1})\dot{x}_1 \tag{2-19}$$

Si la vitesse de la géodésique est donnée par

$$\dot{c}(s) = \dot{x}_1(s)X_1 + \dot{x}_2(s)X_2,$$

le système des équations d'Euler-Lagrange $(2-18)$et $(2-19)$ peut s'écrire comme

$$\ddot{x}_1 X_1 + \ddot{x}_2 X_2 = \theta(\frac{\partial A_1}{\partial x_2} + \frac{\partial A_2}{\partial x_1})(\dot{x}_2 X_1 - \dot{x}_1 X_2) \tag{2-20}$$

Le côté droit a le sens de courbure. En effet, en utilisant le côté droit on obtient

$$-\theta\Omega(X_{1,}X_2)\Im(\dot{c}) = -\theta\mathcal{K}(\dot{c}) \tag{2-21}$$

Pour le côté gauche qui a le sens de l'accélération défini par la connexion horizontale le long du $\dot{c}(s)$

$$\begin{aligned} D_{\dot{c}}\dot{c} &= \sum_{k=1}^{2}\dot{c}g(\dot{c}, X_k)X_k \\ &= \dot{c}(\dot{x}_1)X_1 + \dot{c}(\dot{x}_2)X_2 \\ &= \ddot{x}_1 X_1 + \ddot{x}_2 X_2 \end{aligned}$$

D'où le système des équations d'Euler-Lagrange peut être écrit globalement comme

$$D_{\dot{c}}\dot{c} = -\theta\mathcal{K}(\dot{c}) \tag{2-22}$$

Remarque 3.3.1 *En géométrie riemannienne n'importe quelle courbe horizontale qui satisfait*

$$D_{\dot{c}}\dot{c} = 0$$

s'appelle géodésique non-holonome.

Remarque 3.3.2 *En géométrie sous-riemannienne l'accélération de la géodésique est égale à la courbure.*

3.4 Formulation de Hamilton-Jacobi et connexion

Lemme 3.4.1 *Soit* $c(s) = (x_1(s), x_2(s), t(s))$ *une courbe horizontale et* $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$ *une fonction lisse, alors*

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial s} + g(\dot{c}, \nabla_X f) \tag{2-23}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\frac{df}{ds} &= \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \frac{\partial f}{\partial t}\dot{t} \\
&= \frac{\partial f}{\partial s} + (X_1 f - A_1(x)\frac{\partial f}{\partial t})\dot{x}_1 + (X_2 f + A_2(x)\frac{\partial f}{\partial t})\dot{x}_2 + \frac{\partial f}{\partial t}\dot{t} \\
&= \frac{\partial f}{\partial s} + (X_1 f)\dot{x}_1 + (X_2 f)\dot{x}_2 + \frac{\partial f}{\partial t}\omega(\dot{c}) \\
&= \frac{\partial f}{\partial s} + g(\dot{c}, \nabla_X f)
\end{aligned}$$

Dans ce qui suit nous devons trouver le minimum de

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\tau \tfrac{1}{2}(\dot{x}_1(s)^2 + \dot{x}_2(s)^2)ds \\
&= \int_0^\tau \tfrac{1}{2}\left|\dot{c}(s)\right|^2 ds
\end{aligned}$$

au-dessus du la courbe horizontale $c(s)$, avec les extrémités fixes. Soit $S(x,t) \in \mathcal{F}$ la solution de l' équation Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial \tau}+\frac{1}{2}\left|\nabla_X S\right|^2=0 \qquad , \qquad S(O)=0 \tag{2-24}$$

Considérons l'intégrale

$$J=\int_0^\tau \frac{1}{2}\left|\dot{c}(s)\right|_g^2 ds-dS. \tag{2-25}$$

D'après le lemme

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\tau (\tfrac{1}{2}\left|\dot{c}(s)\right|_g^2-\tfrac{\partial S}{\partial s}-g(\nabla_X S,\dot{c})ds \\ &= \int_0^\tau (\tfrac{1}{2}\left|\dot{c}(s)-\nabla_X S\right|_g^2-(\tfrac{\partial S}{\partial s}+\tfrac{1}{2}\left|\nabla_X S\right|^2))ds \\ &= \int_0^\tau (\tfrac{1}{2}\left|\dot{c}(s)-\nabla_X S\right|_g^2 ds \end{aligned} \tag{2-26}$$

Les intégrales I et J atteignent le minimum pour la même courbe horizontale et ceci donne une courbe avec la vitesse

$$\dot{c}=\nabla_X S \tag{2-27}$$

Théorème 3 *Une courbe horizontale $c(s)$ est minimisante pour l'énergie ssi $\dot{c}=\nabla_X S$*

En utilisant la proposition $(2,4,2)$, nous obtenons :

Corollaire 3.4.1 *La divergence horizontale du flux géodésique est*

$$\operatorname{div}_{\mathcal{H}} \dot{c}=2\Delta_X S \tag{2-28}$$

Le hamiltonien $H : T^*M \to \mathbb{R}$ est définit comme

$$H(x,p)=\frac{1}{2}\sum_k p(X_k)^2$$

Si $p = df$

$$\begin{aligned} H(x, df) &= \tfrac{1}{2}\sum_k df(X_k)^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\sum_k X_k(f)^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\left|\nabla_X f\right|^2 \end{aligned}$$

pour $f = S$

$$H(x, dS) = \frac{1}{2}\left|\nabla_X S\right|^2 = \frac{1}{2}\left|\dot{c}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

Nous avons également

$$H(x, \omega) = \frac{1}{2}\sum_k \omega(X_k)^2 = 0$$

Considérons l'énergie associée à une fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$ est définie comme :

$$\begin{aligned} H(\nabla_X f) &= H(x, df) \\ &= \tfrac{1}{2}\left|\nabla_X f\right| \\ &= \tfrac{1}{2}((X_1 f)^2 + (X_2 f)^2) \end{aligned} \tag{2-29}$$

L'onde frontale est donnée par les courbes de niveau de l'énergie et elle est décrite par **l'équation d'eiconal**

$$H(\nabla f) = k \qquad \text{constante positive} \tag{2-30}$$

avec la condition initiale

$$f(O) = 0 \tag{2-31}$$

Si $k = 0$, alors la fonction constante f est égale à zéro. En effet, supposant que f n'est pas constante. Il y a un point p tel que $(\text{grad}\, f)_p \neq 0$. Alors $\sum_c = f^{-1}(c)$ sera une surface par p, là où $c = f(p)$, alors X_k sont tangente au $\sum_c$ sur un voisinage de p et par conséquent le $\sum_c$ devient surface intégrale pour la distribution horizontale $\mathcal{H}$ autour de p, qui est non-intégrable,contradiction. Si $k \neq 0$, considérant la géodésique commençant par l'origine $c(0) = O$,paramètrie tels que $|\dot{c}(s)|_g^2 = 2k$.Si S est l'action le long $c(s)$ par $(2-27)$ nous avons

$$\begin{aligned} H(\nabla S) &= \tfrac{1}{2}\left|\nabla_X S\right|^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\left|\dot{c}(s)\right|_g^2 \\ &= k \end{aligned}$$

Soit $c(s)$ une géodésique sous -riemannienne qui commence à l'origine, et soit P le premier point conjugué avec 0 long de $c(s)$, désigné par $V(s)$ le champ de vecteurs de Jacobi le long de $c(s)$ et par l'action $S(s)$ entre 0 et $c(s)$

Lemme 3.4.2 *Si c est une courbe horizontale alors*

$$\int_c \omega = 0$$

Preuve. Soit $c : [0,1] \to \mathbb{R}^3$.Comme $c^*\omega$ est 1-forme sur $\mathbb{R}$, $c^*\omega$ et ds sont proposionels

$$c^*\omega(s) = h(s)ds$$

la fonction $h(s)$ est donnée par

$$h(s) = c_s^*(\omega)(\frac{d}{ds})$$

d'où

$$
\begin{aligned}
\int_c \omega &= \int_0^1 c^*\omega \\
&= \int_0^1 h(s)ds \\
&= \int_0^1 c_s^*(\omega)(\frac{d}{ds})ds \\
&= \int_0^1 \omega(\dot{c}(s))ds \\
&= 0
\end{aligned}
$$

parce que $\dot{c}(s) \in \mathcal{H}$

Proposition 3.4.1

$$\int_0^1 \mathcal{K}(V(s))(S(s))ds = 0 \tag{2-32}$$

où $P = c(1)$ et $\mathcal{K}$ est la courbure

Preuve. Soit $c_\varepsilon = F_\varepsilon(c)$ être une variation lisse de c , tel que pour chaque ε , c_ε est une géodésique sous-riemannienne. Comme c_ε est une courbe horizontale, alors

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 \omega(\dot{c}(s))ds \\
&= \int_{c_\varepsilon} \omega \\
&= \int_{F_\varepsilon^*(s)} \omega
\end{aligned}
$$

d' où

$$\frac{d}{ds}\int_{F_\varepsilon^*(s)} \omega = 0$$

où

$$\int_c L_V\ \omega = 0$$

Où V est le champ de vecteurs de Jacobi associé à la variation c_ε Comme V est égal à zéro à la fin des points de c

$$\begin{aligned}
\int_c d(i_V\omega) &= \int_{\partial c} i_V\omega \\
&= w(V)(0) - w(V)(1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Par le décomposition de Cartan

$$L_V\omega = d(i_V\omega) + i_V(d\omega)$$

et alors

$$\int_c i_V\Omega = 0$$

qui peut aussi être écrit comme

$$\int_0^1 \Omega(V(s), \dot{c}(s))ds = 0$$

et en utilisant $\dot{c} = \sum \dot{c}^j X_j$ et $\dot{c}^j(s) = X_j(S)$, alors

$$\begin{aligned}
\Omega(V, \dot{c}) &= \Omega(V, \sum \dot{c}^j X_j) \\
&= \sum \dot{c}^j \Omega(V, X_j) \\
&= \sum \Omega(V, X_j) X_j\,(S) \\
&= \mathcal{K}(V(s))(S(s))
\end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^1 \mathcal{K}(V(s))(S(s))ds = 0$$

Bibliographie

[1] V. I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics, 2nd edition, GTM series 60, Springer-Verlag, Berlin·Heidelberg·New York, 1989.

[2] R. Beals, B. Gaveau and P. C. Greiner, On a geometric formula for the fundamental solution of subelliptic Laplacians, Math. Nachr., $181(1996), 81-163$.

[3] R. Beals, B. Gaveau and P. C. Greiner, Complex Hamiltonian mechanics and parametrices for subelliptic Laplacians,I,II,III, Bull. Sci. Math., $21(1997), 1-36, 97-149, 195-259$.

[4] R. Beals, B. Gaveau and P. C. Greiner, Hamilton-Jacobi theory and the heat kernel on Heisenberg groups, J. Math. Pures Appl., $79(7)(2000), 633-689$.

[5] R. Beals and P. C. Greiner, Calculus on Heisenberg manifolds, Ann. Math. Studiesno.119, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1988.

[6] C. Berenstein, D. C. Chang and J. Tie, Laguerre Calculus and Its Applications in the Heisenberg Group, AMS/IP series in advanced mathematics no.22, International Press, Cambridge, Massachusetts,2001.

[7] O. Calin, D. C. Chang and P. Greiner, On a step $2(k+1)$ subRiemannian manifold, J. Geom. Anal., $12(1)(2004), 1-18$.

[8] O. Calin, D. C. Chang and P. C. Greiner, Real and complex Hamiltonian mechanics on some subRiemannian manifolds, Asian J. Math., $18(1)(2004), 137-160$.

[9] O. Calin, D. C. Chang, Greiner P. and Y. Kannai, On the geometry induced by a Grusin operator, to appear in Comtemporary Math. AMS, (2005).

[10] O. Calin, D. C. Chang and P. C. Greiner, Geometric Analysis on the Heisenberg Group and Its Generalization.

[11] E. Cartan, —it Les groupes de transformations continus, infinis, simples, Ann. Ecole Norm. Sup.,26(1909), $93 - 161$.

[12] D. C. Chang and P. Greiner, Harmonic analysis and subRiemannian geometry on Heisenberg groups, Bulletin Institute Math. Academia Sinica, 30(3)(2002), $153-190$.

[13] D. C. Chang and P. Greiner, Analysis and geometry on Heisenberg groups, Proceedings of Second International Congress of Chinese Mathematicians (C.S. Lin and S.T.Yau ed.), International Press, Cambridge, Massachusetts, (2004), $379 - 405$.

[14] D. C. Chang and J. Tie, Estimates for powers of sub-Laplacian on the non-isotropic Heisenberg group, J. Geom. Anal., 10(2000), $653 - 678$.

[15] W. L. Chow, Uber Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen ersterOrdnung, Math. Ann., 117(1939), $98 - 105$.

[16] G. B. Folland and E. M. Stein, —it Estimates for the ∂_b complex and analysis on the Heisenberg group, Comm. Pure Appl. Math., 27(1974), $429 - 522$.

[17] B. Gaveau, Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimees sous elliptiques sur certains groupes nilpotents, Acta Math., 139(1977), $95 - 153$.

[18] P. Greiner, A fundamental solution for a non-ellpitic partial differential operator,Can. J. Math., 31(1979), $1107 - 1120$.

[19] L. H¨ormander, Hypoelliptic second-order differential equations, Acta Math., 119,$147 - 171$(1967).

[20] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, John Wiley and Sons, New York, New York,1963.

[21] R. S. Millman and G.D. Parker, Elements of Differential Geometry, Prentice Hall Inc., New York, 1977

[22] Harmonic Analysis - Real Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1993.

[23] R. Strichartz, Subriemannian geometry, J. Differential Geom. 24(1986), $221-263$.

[24] A. L. Xavier Jr. and M. A. M. de Aguiar, Ann. Phys. (N.Y.)252(1996), 458.

Résumé

En l'absence d'une connexion adéquate pour la géométrie sous-riemannienne, on s'intéresse dans ce mémoire à introduire quelques types de connexions qui s'adaptent avec cette géométrie. On donnera, en utilisant ses notions, les versions géométriques des équations variationnelles.

Mots clés : géométrie sous riemannienne, connexions, géodésiques, calcul de variation

Abstract

In the absence of an adequate connection for the sub-riemannian geometry, in this memory we introduce some types of connections which are adapted with this geometry. We'll give, by using notions, the geometrical versions of the variational equations.

Key words: Sub-Riemannian geometry, connection, geodesics, variational calculs

ملخص

في غياب مفهوم للترابط الملائم للهندسة الريمانية الجزئية نهتم في هذه المذكرة بتقديم بعض أنواع الترابطات التي توافق هذه الهندسة. نعطي بإستعمال تلك المفاهيم الصيغ الهندسية للمعادلات التغيراتية.

المفاتيح : الهندسة الريمانية الجزئية ،الترابط،جيودوزية، حساب التغيرات